Karlsruher Institut für Technologie

7. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

Parameterschätzverfahren II

1. Rekursiver LS-Schätzer

Bayes Schätzung

1. A-posteriori Dichte und Likelihood Dichte
2. Maximum-a-posteriori Schätzer
3. Maximum Likelihood Schätzer
4. MAP- und ML-Schätzer bei Normalverteilung

Hiwis für Praktikum Digitale Signalverarbeitung gesucht

- Sommersemester 2015
- Praktikumstermin: mittwochnachmittags, 14:00 – 18:00 Uhr
- Betreuung von Studenten während der Versuchsdurchführung
- Interessenten müssen das Praktikum noch nicht selbst absolviert haben

Bewerbung:

- Ansprechpartner: Sebastian Bauer (http://www.iiit.kit.edu/sbauer.php)
- Bewerbung mit Notenauszug an sebastian.bauer@kit.edu
- Rückfragen: per Email oder telefonisch (0721 608-44515)

Auslandspraktikum USA

- **Praktikum** bei **Hitachi** in **Detroit, USA**
- Dauer: 6 Monate
- Beginn: **September 2015**
- Themengebiete: Signal- und Bildverarbeitung, Systemmodellierung und Regelungstechnik in der Automobilindustrie

Bewerbung:

- Ansprechpartner: Sebastian Bauer (http://www.iiit.kit.edu/sbauer.php)
- Anschreiben und Lebenslauf inkl. Notenauszug an Prof. Puente adressieren, aber an sebastian.bauer@kit.edu schicken
- Bewerbungsfrist für Praktikum ab September 2015: **28.02.2015**
- Rückfragen: per Email oder telefonisch (0721 608-44515)

1. Rekursiver Least-Squares Schätzer

Least-Squares-Schätzer

Wiederholung

- **Ausgangspunkt:** lineares Signalmodell

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{b} + \mathbf{e}(n)$$

- **Fehlermodell:** weißes Rauschen
- Gütemaß

$$||\mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)||^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |y(n-i) - \hat{y}(n-i)|^2 \;\rightarrow\; \min$$

- Schätzgleichung

$$\hat{\mathbf{b}}(n) = \underbrace{(\mathbf{\Phi}(n)^T \mathbf{\Phi}(n))^{-1} \mathbf{\Phi}(n)^T}_{\text{Moore-Penrose Pseudoinverse}} \cdot \mathbf{y}(n) = \mathbf{G}(n)\mathbf{y}(n)$$

- erwartungstreue Schätzung, wenn Annahmen erfüllt sind
- Kovarianz des Schätzfehlers: $\mathbf{C}_{\tilde{b}\tilde{b}} = \mathbf{G}\mathbf{C}_{ee}\mathbf{G}^T$

Rekursiver LS-Schätzer

Rekursive Schätzer

- Zeitpunkt n:
  - Nutzen des letzten geschätzten Parametervektors $\hat{\mathbf{b}}(n-1)$
  - Nutzen der aktuellen Messgleichung $\mathbf{y}(n) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}(n) + \mathbf{e}(n)$

- Rekursive Schätzgleichung

$$\hat{\mathbf{b}}(n) = \hat{\mathbf{b}}(n-1) + \mathbf{k}(n)[y(n) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)\hat{\mathbf{b}}(n-1)]$$

- Verschiedene Schätzer unterscheiden sich in der Berechnung des Gewichtungsfaktors $\mathbf{k}(n)$. Dieser bestimmt, wie stark die aktuelle Differenz zwischen Mess- und Schätzwert die Schätzung beeinflusst.

Rekursiver LS-Schätzer

- Gütemaß

$$J(n) = \sum_i (y(n-i) - \hat{y}(n-i))^2$$

- Gewichtungsfaktor

$$\mathbf{k}(n) = \mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)]^{-1}$$

- Bezogene Schätzfehlerkovarianz

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{k}(n)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)]\mathbf{P}(n-1)$$

- Anfangswert: $\mathbf{P}(0) = c \cdot \mathbf{I}, \qquad c = 10^3 \ldots 10^6$

Aufgaben

Aufgabe 1: Konstantes Nutzsignal

Ein Messsignal $y(t)$ bestehe aus einem konstanten Nutzsignal $u(t) = a$, dem eine Drift $e_1(t) = b \cdot t$ sowie weißes Rauschen $e_2(t)$ überlagert ist. Die Parameter a und b seien unbekannt.

$$y(t) = u(t) + e_1(t) + e_2(t)$$

Aus den abgetasteten Messwerten $y(nT)$ soll durch rekursive LS-Schätzung der Parameter a bestimmt werden.

a) Stellen Sie das zeitdiskrete Signalmodell für einen Messzeitpunkt auf und verwenden Sie dabei das gesamte Wissen.

b) Berechnen Sie die Elemente des Gewichtsvektors $\mathbf{k}(n)$, der Matrix $\mathbf{P}(n)$ und des Parametervektors $\hat{\mathbf{b}}(n)$ allgemein.

Hinweis: $\mathbf{k}(n)$ und $\mathbf{P}(n)$ sind allgemein gegeben durch:

$$\mathbf{k}(n) = \begin{bmatrix} k_1(n) \\ k_2(n) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{b}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) \\ \hat{b}_2(n) \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1: Konstantes Nutzsignal

Messsignal: $y(t) = u(t) + e_1(t) + e_2(t)$

- $u(t) = a$ — konst.
- $e_1(t) = b \cdot t$ — Drift
- $e_2(t)$ — weißes Rauschen

- a) Signalmodell für einen Messzeitpunkt

zeitkontinuierliches Modell: $y(t) = a + b \cdot t + e_2(t)$

zeitdiskretes Modell: $y(n) = a + b \cdot nT + e_2(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & nT \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + e_2(n)$

Aufgabe 1: Konstantes Nutzsignal

- b) **1. Rekursionsgleichung des Gewichtsvektors**:

$$\mathbf{k}(n) = \mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)\left[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)\right]^{-1}$$

Berechnung in zwei Teilschritten:

- $\mathbf{P}(n-1) \cdot \boldsymbol{\varphi}(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n-1) & p_{12}(n-1) \\ p_{21}(n-1) & p_{22}(n-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ nT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(n-1) + p_{12}(n-1) \cdot nT \\ p_{21}(n-1) + p_{22}(n-1) \cdot nT \end{bmatrix}$

- $\left[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{P}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)\right]^{-1} = \left(1 + \begin{bmatrix} 1 & nT \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11}(n-1) & p_{12}(n-1) \\ p_{21}(n-1) & p_{22}(n-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ nT \end{bmatrix}\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{1 + p_{11}(n-1) + \big(p_{12}(n-1) + p_{21}(n-1)\big)nT + p_{22}(n-1)(nT)^2}$$

Komponenten des Verstärkungsvektors:

$$k_1(n) = \frac{p_{11}(n-1) + p_{12}(n-1) \cdot nT}{1 + p_{11}(n-1) + \big(p_{12}(n-1) + p_{21}(n-1)\big)nT + p_{22}(n-1)(nT)^2}$$

$$k_2(n) = \frac{p_{21}(n-1) + p_{22}(n-1) \cdot nT}{1 + p_{11}(n-1) + \big(p_{12}(n-1) + p_{21}(n-1)\big)nT + p_{22}(n-1)(nT)^2}$$

Aufgabe 1: Konstantes Nutzsignal

2. Rekursionsgleichung der bezogenen Schätzfehlerkovarianz:

$$\mathbf{P}(n) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{k}(n) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n)\right] \mathbf{P}(n-1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(n) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1(n) \\ k_2(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & nT \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_{11}(n-1) & p_{12}(n-1) \\ p_{21}(n-1) & p_{22}(n-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - k_1(n) & -k_1(n) \cdot nT \\ -k_2(n) & 1 - k_2(n) \cdot nT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(n-1) & p_{12}(n-1) \\ p_{21}(n-1) & p_{22}(n-1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{11}(n) &= p_{11}(n-1)\big(1 - k_1(n)\big) - p_{21}(n-1)k_1(n) \cdot nT \\
p_{12}(n) &= p_{12}(n-1)\big(1 - k_1(n)\big) - p_{22}(n-1)k_1(n) \cdot nT \\
p_{21}(n) &= -p_{11}(n-1)k_2(n) + p_{21}(n-1)\big(1 - k_2(n) \cdot nT\big) \\
p_{22}(n) &= -p_{12}(n-1)k_2(n) + p_{22}(n-1)\big(1 - k_2(n) \cdot nT\big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1: Konstantes Nutzsignal

3. Rekursionsgleichung des Parametervektors:

$$\hat{\mathbf{b}}(n) = \hat{\mathbf{b}}(n-1) + \mathbf{k}(n)\left[y(n) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(n) \cdot \hat{\mathbf{b}}(n-1)\right]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) \\ \hat{b}_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n-1) \\ \hat{b}_2(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(n) \\ k_2(n) \end{bmatrix} \left(y(n) - \begin{bmatrix} 1 & nT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n-1) \\ \hat{b}_2(n-1) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n-1) \\ \hat{b}_2(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(n) \\ k_2(n) \end{bmatrix} \cdot \left(y(n) - \hat{b}_1(n-1) - \hat{b}_2(n-1) \cdot nT\right)$$

$$\hat{b}_1(n) = \hat{b}_1(n-1) + k_1(n) \cdot \left(y(n) - \hat{b}_1(n-1) - \hat{b}_2(n-1) \cdot nT\right)$$
$$\hat{b}_2(n) = \hat{b}_2(n-1) + k_2(n) \cdot \left(y(n) - \hat{b}_1(n-1) - \hat{b}_2(n-1) \cdot nT\right)$$

Bayes Schätzung

A-posteriori Dichte und Likelihood Dichte
Maximum-a-posteriori Schätzer
Maximum Likelihood Schätzer
MAP- und ML-Schätzer bei Normalverteilung

1. A-posteriori Dichte und Likelihood Dichte

- **Geg:** lineares Signalmodell $\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{b} + \mathbf{e}(n)$

- **Likelihood Dichte**

  (= Dichte des Messvektors bei bekanntem Parametervektor)

  $$f(\mathbf{y}|\mathbf{b})$$

  Da $\mathbf{b}$ als bekannt vorausgesetzt wird, ist der Ausdruck $\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{b}$ deterministisch, nur $\mathbf{e}(n)$ ist stochastisch (im Gegensatz zu $f(\mathbf{y})$)

- **A-posteriori Dichte**

  (= Dichte des Parametervektors bei bekanntem Messvektor)

  $$f(\mathbf{b}|\mathbf{y})$$

- **Zusammenhang:**

  $$f(\mathbf{y},\mathbf{b}) = f(\mathbf{y}|\mathbf{b}) \cdot f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}|\mathbf{y}) \cdot f(\mathbf{y})$$

2. Maximum-a-posteriori Schätzer

- **Grundlage:** lineares Signalmodell $\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Phi}(n)\mathbf{b} + \mathbf{e}(n)$
- **Gütefunktion**

$$E_{\mathbf{b},\mathbf{y}}\left\{C(\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}})\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}}) f(\mathbf{b},\mathbf{y})\,\mathrm{d}\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}\,\mathbf{y} \;\rightarrow\; \min$$

Für eine große Klasse von Kostenfunktionen $C(\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}})$ und Verteilungsdichten gilt:

- Der Schätzwert lautet: $\hat{\mathbf{b}} = E_{\mathbf{b}|\mathbf{y}}\left\{\mathbf{b}\right\}$
- An dieser Stelle besitzt A-posteriori Dichte ein Maximum

Problem: Verteilungsdichte der Parameter und damit A-posteriori Dichte im Allgemeinen nicht bekannt!

Aber: Ableitung Praktikabler Schätzer möglich!

3. Maximum Likelihood Schätzer

Die Statistik der Parameter ist unbekannt. Annahme:

- Gleichverteilung über ein unendlich großes Intervall bzw.
- Normalverteilung mit unendlich großer Varianz $\mathbf{R}_{bb}^{-1} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} f(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

In diesem Fall liegen das Maximum der a-posteriori Dichte und der Likelihood Dichte an der selben Stelle: $\hat{\mathbf{b}} = E_{\mathbf{b}|\mathbf{y}}\{\mathbf{b}\} = E_{\mathbf{y}|\mathbf{b}}\{\mathbf{b}\}$

- Bei N statistisch unabhängigen Messungen

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{b}) = \prod_{n=0}^{N-1} f(y_n|\mathbf{b})$$

Zur einfacheren Berechnung des Maximums der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte wird die Funktion vor dem Ableiten logarithmiert.

4. MAP- und ML-Schätzer bei Normalverteilung

- Annahme: Der Fehler ist normalverteilt

$$f(\mathbf{e}) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{0}, \mathbf{C}_{ee}\right\}$$

- Folgerung: Auch die Likelihood Dichte ist normalverteilt

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{b}) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{\Phi b}, \mathbf{C}_{ee}\right\}$$

Gauß-Markov-Schätzer

- Annahme: Parametervektor ist normalverteilt

$$f(\mathbf{b}) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{0}, \mathbf{R}_{bb}\right\}$$

- Schätzwert:

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{ee}^{-1}\mathbf{\Phi} + \mathbf{R}_{bb}^{-1})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{ee}^{-1}\mathbf{y}$$

4. MAP- und ML-Schätzer bei Normalverteilung

- Annahme: Der Fehler ist normalverteilt

$$f(\mathbf{e}) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{0},\mathbf{C}_{ee}\right\}$$

- Folgerung: Auch die Likelihood Dichte ist normalverteilt

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{b}) = \mathcal{N}\left\{\mathbf{\Phi b},\mathbf{C}_{ee}\right\}$$

Minimum-Varianz-Schätzer

- Statistik des Parametervektors unbekannt $\mathbf{R}_{bb}^{-1} = \mathbf{0}$
- Schätzwert:

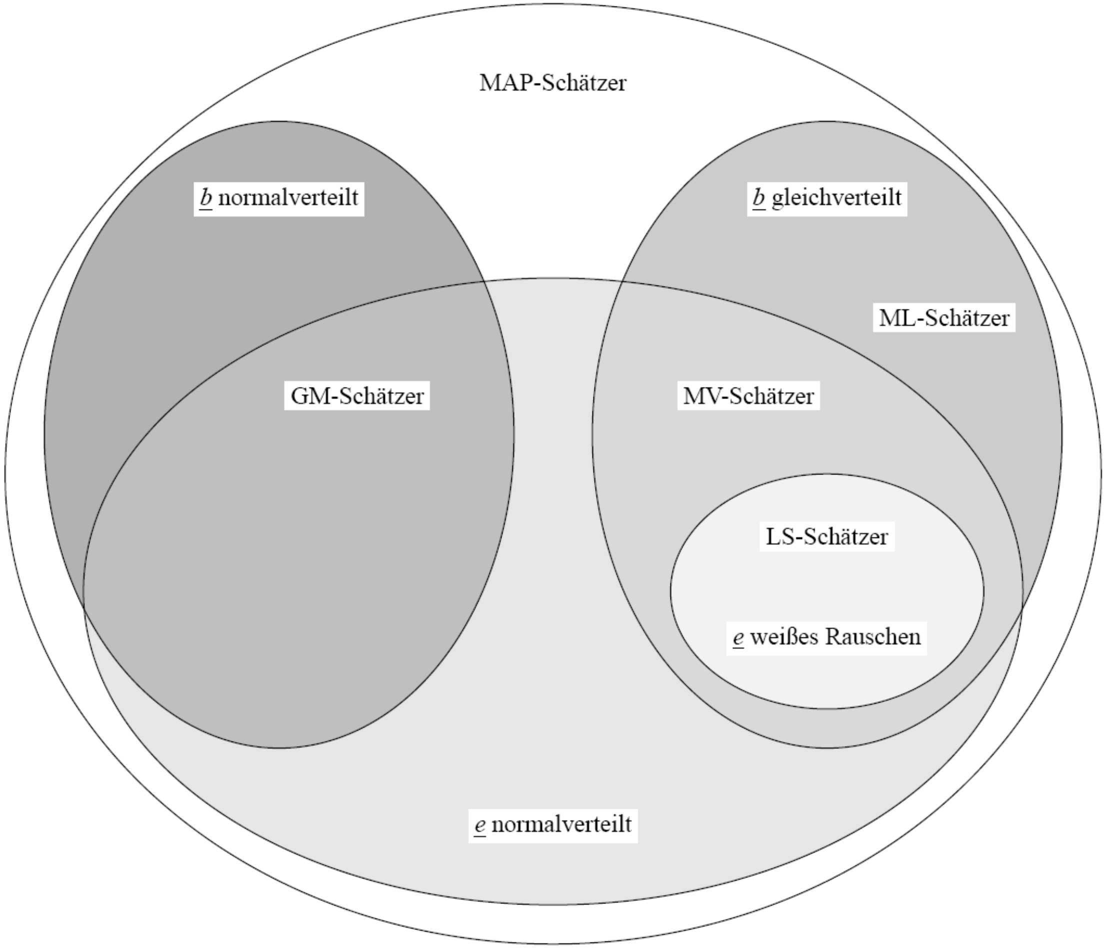
$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{ee}^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{ee}^{-1}\mathbf{y}$$

- zusätzl. Annahme: Fehler ist weißes Rauschen → **LS-Schätzer**

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \qquad \mathbf{C}_{ee} = \sigma_e^2 \cdot \mathbf{I}$$

Bayes Schätzer: Überblick

- Klassen von Bayes-Schätzern



Aufgabe 2: Mehrere Messumformer

Gegeben sei die in Abbildung 1 dargestellte Rohrleitung, in der inkompressible Flüssigkeit strömt. Zur Bestimmung des Durchflusses Q sind an die Rohrleitung drei Messumformer M_1, M_2, M_3 montiert, die einen eingeprägten Strom in Abhängigkeit des Durchflusses liefern.

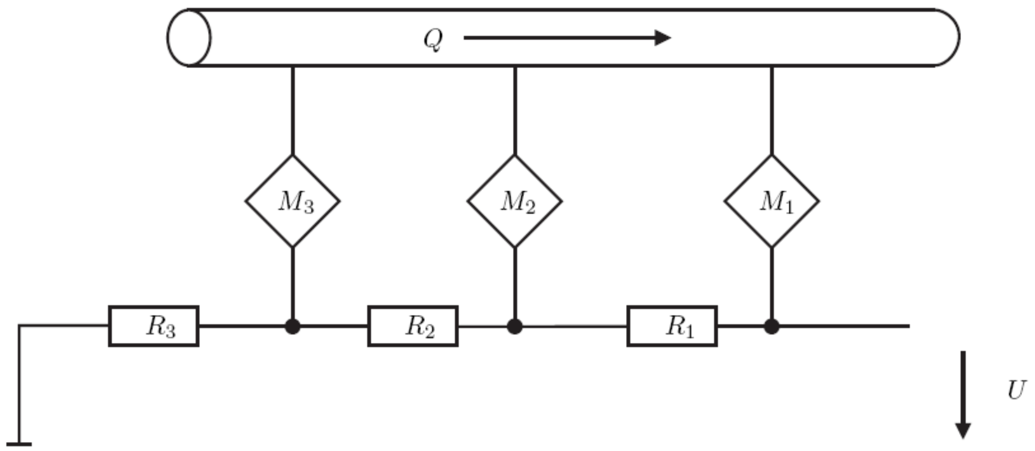


Abbildung 1: Rohrleitung

Der Zusammenhang zwischen Durchfluss und Strom ist durch

$$Q = c_j \cdot i_j \qquad j = 1,2,3$$

gegeben, wobei c_j die Empfindlichkeit des jeweiligen Messumformers bezeichnet.

a) Zunächst wird der Strom der einzelnen Messumformer gemessen (die Messungen an den verschiedenen Messumformern sind statistisch unabhängig). Dabei tritt ein additiver Fehler

$$E\{e_j\} = 0 \qquad\qquad E\{e_i e_j\} = \sigma_j^2 \cdot \delta_{ij}$$

auf. Entwerfen Sie einen Minimum-Varianz-Schätzer für den Durchfluss Q.

b) Wie sind die Widerstände der Messanordnung zu dimensionieren, damit die Spannung U proportional zum Minimum-Varianz-Schätzwert ist?

Aufgabe 2: Mehrere Messumformer

Karlsruher Institut für Technologie

- a) Minimum-Varianz-Schätzer für Durchfluss Q

Zusammenhang Durchfluss – Strom: $i_j = \frac{1}{c_j} \cdot Q$

Messgröße: $y_j = i_j + e_j = \frac{1}{c_j} \cdot Q + e_j$

Fehler: $E\{e_j\} = 0$ $\qquad E\{e_i e_j\} = \sigma_j^2 \cdot \delta_{ij}$

3 Messungen → Signalmodell: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_2} \\ \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \cdot Q + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$

Kovarianzmatrix des Fehlers:

$$\mathbf{C}_{ee} = E\left\{\mathbf{e}\,\mathbf{e}^T\right\} = E\left\{\begin{bmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2: Mehrere Messumformer

Minimum-Varianz-Schätzwert: $\hat{Q} = (\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y}$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_2} \\ \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{c_1^2\sigma_1^2} + \frac{1}{c_2^2\sigma_2^2} + \frac{1}{c_3^2\sigma_3^2}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_1\sigma_1^2} \cdot y_1 + \frac{1}{c_2\sigma_2^2} \cdot y_2 + \frac{1}{c_3\sigma_3^2} \cdot y_3$$

$$\hat{Q} = \frac{\frac{1}{c_1\sigma_1^2} \cdot y_1 + \frac{1}{c_2\sigma_2^2} \cdot y_2 + \frac{1}{c_3\sigma_3^2} \cdot y_3}{\frac{1}{c_1^2\sigma_1^2} + \frac{1}{c_2^2\sigma_2^2} + \frac{1}{c_3^2\sigma_3^2}} =: \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

mit $\alpha_i = \dfrac{\frac{1}{c_i\sigma_i^2}}{\frac{1}{c_1^2\sigma_1^2} + \frac{1}{c_2^2\sigma_2^2} + \frac{1}{c_3^2\sigma_3^2}}, \qquad i = 1,2,3$

Aufgabe 2: Mehrere Messumformer

- b) R_i so dimensionieren dass U proportional zu MV-Schätzwert

Spannung in Abhängigkeit der Ausgangsströme:

$$\begin{aligned} U &= R_1 y_1 + R_2(y_1 + y_2) + R_3(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (R_1 + R_2 + R_3)y_1 + (R_2 + R_3)y_2 + R_3 y_3 \end{aligned}$$

Forderung: $U = K \cdot \hat{Q}$

$$\Rightarrow (R_1 + R_2 + R_3)y_1 + (R_2 + R_3)y_2 + R_3 y_3 = K\alpha_1 y_1 + K\alpha_2 y_2 + K\alpha_3 y_3$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= K\alpha_1 \\ R_2 + R_3 &= K\alpha_2 \\ R_3 &= K\alpha_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} R_3 &= K\alpha_3 \\ R_2 &= K(\alpha_2 - \alpha_3) \\ R_3 &= K(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}}$$

Damit R_j positiv, muss gelten:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_1\sigma_1^2 < c_2\sigma_2^2 < c_3\sigma_3^2$$

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

Durch ein Fallexperiment soll die Erdbeschleunigung bestimmt werden. Dabei wird eine Kugel bei $x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen gelassen. Die Geschwindigkeit der Kugel kann unter Berücksichtigung eines additiven mittelwertfreien Fehlers gemessen werden.

$$y(t) = v(t) + e(t)$$

Die Varianz des Messfehlers ist proportional zum Abstand x der Kugel von der Anfangslage; die einzelnen Fehler sind unkorreliert.

$$E\{e^2\} = \frac{x}{x_N}\sigma_e^2$$

Es erfolgt eine zeitdiskrete Messung von $y(t)$.

a) Bestimmen Sie die Messfehlervarianz für den n-ten Wert. Geben Sie die Kovarianzmatrix des Messfehlers an.

b) Bestimmen Sie den Minimum-Varianz-Schätzer für die Erdbeschleunigung.

c) Untersuchen Sie den Schätzer auf Erwartungstreue und auf Konsistenz.

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

- a) Messfehlervarianz für n-ten Wert

$$E\left\{e^2\right\} = \frac{x}{x_N}\sigma_e^2 \qquad x_N = \text{Normierungsfaktor}$$

Abstand zwischen Kugel und Messgerät: $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

Zeitabhängigkeit der Messfehlervarianz: $E\left\{e^2(t)\right\} = \frac{gt^2}{2x_N} \cdot \sigma_e^2$

Abtastung: $E\left\{e^2(n)\right\} = \frac{gn^2T^2}{2x_N} \cdot \sigma_e^2$

Unkorrelierte Fehler: $E\left\{e(n)e(m)\right\} = \frac{gT^2}{2x_N} \cdot \sigma_e^2 \cdot n^2 \cdot \delta(n-m)$

Messfehlerkovarianzmatrix: $\mathbf{C}_{ee} = \frac{gT^2}{2x_N} \cdot \sigma_e^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & N^2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

- b) Minimum-Varianz-Schätzer für die Erdbeschleunigung

Messsignal: $y(t) = v(t) + e(t) = g \cdot t + e(t)$

Signalmodell: $$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1T \\ 2T \\ \vdots \\ NT \end{bmatrix} \cdot g + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

Minimum-Varianz-Schätzwert: $\hat{g} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y}$

$$\mathbf{C}_{ee}^{-1} = \frac{2x_N}{gT^2\sigma_e^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1/N^2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi} = T \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & N \end{bmatrix} \cdot \frac{2x_N}{gT^2\sigma_e^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1/N^2 \end{bmatrix} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} = \frac{2x_N}{g\sigma_e^2} \cdot N$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = T \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & N \end{bmatrix} \cdot \frac{2x_N}{gT^2\sigma_e^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1/4 & & & \\ & & 1/9 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1/N^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \frac{2x_N}{g\sigma_e^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{y(n)}{nT}$$

➡

$$\hat{g} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{y(n)}{nT}$$

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

- c) Erwartungstreue? Konsistenz?

Schätzfehler:
$$\hat{g} - g = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{y(n)}{nT} - g$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{g \cdot nT + e(n)}{nT} - g$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{e(n)}{nT}$$

$$E\{\hat{g} - g\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{e(n)}{nT}\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{E\{e(n)\}}{nT} = 0$$

erwartungstreu

Aufgabe 3: Erdbeschleunigung

Varianz des Schätzfehlers:

$$C_{\tilde{g}\tilde{g}} = E\left\{(\hat{g}-g)^2\right\} = E\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\frac{e(n)e(n')}{nT\cdot n'T}\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\frac{E\left\{e(n)e(n')\right\}}{nT\cdot n'T}$$

mit $E\left\{e(n)e(m)\right\} = \frac{gT^2}{2x_N}\cdot\sigma_e^2\cdot n^2\cdot\delta(n-m)$ folgt

$$\boxed{C_{\tilde{g}\tilde{g}}} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\frac{\frac{gn^2T^2}{2x_N}\sigma_e^2\delta(n-n')}{nT\cdot n'T} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{gn^2T^2\sigma_e^2}{2x_N\cdot n^2T^2}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{g}{2x_N}\cdot\sigma_e^2 \boxed{\xrightarrow[\infty]{N} 0}$$

konsistent

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

Eine konstante physikalische Größe a wird gemessen. Während der Messung überlagert sich additiv ein Sprung mit unbekannter Höhe b, aber bekanntem Anfangszeitpunkt t_0, sowie ein normalverteiltes Fehlersignal $e(t)$.

$$y(t) = a + b \cdot \sigma(t - t_0) + e(t)$$

Nach der Abtastung von N Werten ergibt sich die zeitdiskrete Darstellung.

$$y(n) = a + b \cdot \sigma(n - n_0) + e(n)\,, \qquad n_0 \in \mathbb{N}\,, \quad 0 \leq n_0 \leq N - 1$$

Die Varianz des mittelwertfreien Fehlers beträgt:

$$E\left\{e(n)e(m)\right\} = \sigma_n^2 \cdot \delta(n - m) \qquad \text{mit} \qquad \sigma_n^2 = \begin{cases} \sigma_1^2 & n < n_0 \\ \sigma_2^2 & n \geq n_0 \end{cases}$$

a) Wie lautet das Signalmodell?

b) Bestimmen Sie den Least-Squares-Schätzer für die Größe a.

c) Bestimmen Sie den Minimum-Varianz-Schätzer für die Größe a.

d) Sind die Schätzer erwartungstreu?

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

- a) Signalmodell:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix}$$

- b) LS-Schätzer für a

$$\hat{\mathbf{b}}_{LS} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N - n_0 \\ N - n_0 & N - n_0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

$$(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \underbrace{\frac{1}{N(N-n_0)-(N-n_0)^2}}_{=\frac{1}{(N-n_0)(N-N+n_0)}} \begin{bmatrix} N-n_0 & -(N-n_0) \\ -(N-n_0) & N \end{bmatrix} = \frac{1}{n_0}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{N}{N-n_0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \\ \sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{LS} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0}\left(\sum_{n=0}^{N-1} y(n) - \sum_{n=n_0}^{N-1} y(n)\right) \\ \frac{1}{n_0}\left(-\sum_{n=0}^{N-1} y(n) + \frac{N}{N-n_0}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n)\right) \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{n_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} y(n)}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{n_0} \left(\underbrace{- \sum_{n=0}^{n_0-1} y(n) - \frac{N-n_0}{N-n_0} \sum_{n=n_0}^{N-1} y(n)}_{=-\sum_{n=0}^{N-1} y(n)} + \frac{N}{N-n_0} \sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) \right)$$

$$= \frac{1}{N-n_0} \sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) - \frac{1}{n_0} \sum_{n=0}^{n_0-1} y(n)$$

- c) MV-Schätzer für a

$$\mathbf{C}_{ee} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_1^2 & & & \\ & & & \sigma_2^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}_{ee}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sigma_1^2 & & & \\ & & & 1/\sigma_2^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

MV-Schätzwert:

$$\hat{\mathbf{b}}_{MV} = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sigma_1^2 & & & \\ & & & 1/\sigma_2^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n_0}{\sigma_1^2} + \frac{N - n_0}{\sigma_2^2} & \frac{N - n_0}{\sigma_2^2} \\ \frac{N - n_0}{\sigma_2^2} & \frac{N - n_0}{\sigma_2^2} \end{bmatrix} = \frac{N - n_0}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_2^2 \frac{n_0}{N - n_0} + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

$$\left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{\Phi}\right)^{-1} = \frac{1}{n_0} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1^2 \\ -\sigma_1^2 & \sigma_2^2 \dfrac{n_0}{N - n_0} + \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sigma_1^2 & & & \\ & & & 1/\sigma_2^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0 - 1} \frac{y(n)}{\sigma_1^2} + \sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{y(n)}{\sigma_2^2} \\ \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{y(n)}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

$$\hat{\mathbf{b}}_{MV} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0}\left(\sum_{n=0}^{n_0-1} y(n) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n)\right) \\ \frac{1}{n_0}\left(-\sum_{n=0}^{n_0-1} y(n) - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) + \frac{n_0}{N-n_0}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n)\right) \end{bmatrix}$$

➡ $$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} y(n)}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{N-n_0}\sum_{n=n_0}^{N-1} y(n) - \frac{1}{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} y(n)$$

➡ Der LS-Schätzer und der MV-Schätzer sind in diesem Fall identisch.

Aufgabe 4: Vergleich LS- mit MV-Schätzer

- d) Erwartungstreue der Schätzer?

Erwartungswert von $\hat{a}$

$$E\left\{\hat{a}\right\} = E\left\{\frac{1}{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} y(n)\right\} = \frac{1}{n_0}\sum_{n=0}^{n_0-1} a + b\cdot\underbrace{\sigma(n-n_0)}_{=0,\, n<n_0} + \underbrace{E\left\{e(n)\right\}}_{=0} = a$$

➡ Die Schätzer sind erwartungstreu.

Aufgabe 5: Lorentzverteilung

In der Physik können Linienspektren mit Hilfe der Lorentzverteilung beschrieben werden. Die Lorentzverteilung besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte f_L:

$$f_L(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta}{4(x-a)^2 + \vartheta^2}\,, \qquad \vartheta > 0$$

Die Lorenzverteilung ist symmetrisch bezüglich $x = a$ und besitzt an dieser Stelle ihr einziges Maximum. Der Parameter ϑ ist die Halbwertsbreite. (Die Varianz ist für die Lorentz-Verteilung nicht definiert: $\sigma_x^2 \to \infty$.)
Aus N unabhängigen Messungen x_n, $n = 0, \ldots, N-1$ einer lorentzverteilten Zufallsvariable sollen die Schätzwerte für die Parameter a und ϑ bestimmt werden. Stellen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzgleichung für beide Parameter auf.

Hinweis: Das Gleichungssystem muss nicht nach den Parametern aufgelöst werden.

Aufgabe 5: Lorentzverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte einer Messung x :

$$f_L(x|a,\vartheta) = \frac{2}{\pi}\frac{\vartheta}{4(x-a)^2+\vartheta^2}\,, \qquad \vartheta > 0$$

N unabhängige Messungen x_n, n = 0, ... , N-1

Gesucht: Maximum-Likelihood-Schätzgleichungen für a, ϑ

Verbundwahrscheinlichkeitsdichte:

Produkt der Einzelwahrscheinlichkeitsdichten, da Messungen unabhängig

$$f(\mathbf{x}|a,\vartheta) = \boxed{\prod_{n=0}^{N-1} f(x_n|a,\vartheta)} = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2}{\pi}\frac{\vartheta}{4(x_n-a)^2+\vartheta^2}$$

→ maximieren!

➡ Bedingung: $$\frac{\partial}{\partial[a,\vartheta]} \prod_{n=0}^{N-1} f(x_n|a,\vartheta)\Big|_{\hat{a},\hat{\vartheta}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Aufgabe 5: Lorentzverteilung

Einfachere Berechnung:

Maximieren der logarithmierten Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{\partial}{\partial[a,\vartheta]} \ln \prod_{n=0}^{N-1} f(x_n|a,\vartheta)\Big|_{\hat{a},\hat{\vartheta}} = \frac{\partial}{\partial[a,\vartheta]} \sum_{n=0}^{N-1} \ln f(x_n|a,\vartheta)\Big|_{\hat{a},\hat{\vartheta}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

$$\ln f(\mathbf{x}|a,\vartheta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln f(x_n|a,\vartheta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(\frac{2}{\pi}\frac{\vartheta}{4(x_n-a)^2+\vartheta^2}\right)$$

$$= N\ln\frac{2}{\pi} + N\ln\vartheta - \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left(4(x_n-a)^2+\vartheta^2\right)$$

Aufgabe 5: Lorentzverteilung

Partielle Ableitung nach den Parametern ergibt Bestimmungsgleichungen für die Schätzwerte:

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f(\mathbf{x}|a,\vartheta)\Big|_{\hat{a},\hat{\vartheta}} = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{-8(x_n - \hat{a})}{4(x_n - \hat{a})^2 + \hat{\vartheta}^2} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{8(x_n - \hat{a})}{4(x_n - \hat{a})^2 + \hat{\vartheta}^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln f(\mathbf{x}|a,\vartheta)\Big|_{\hat{a},\hat{\vartheta}} = \frac{N}{\hat{\vartheta}} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2\hat{\vartheta}}{4(x_n - \hat{a})^2 + \hat{\vartheta}^2} \overset{!}{=} 0$$

- Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems: Kandidaten für $\hat{a}, \hat{\vartheta}$
- Darunter müssen diejenigen ermittelt werden, die die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte tatsächlich maximieren

Aufgabe 6: Maximum-Likelihood-Schätzer

Die Temperatur in einem Hochvakuum lässt sich über die kinetische Energie der darin enthaltenen Masseteilchen definieren. Diese wird dabei über die Geschwindigkeit v definiert. Die Verteilung der Geschwindigkeit der Masseteilchen im homogenen Gas bei der Temperatur T ist durch die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$$f(v) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Aus N statistisch unabhängigen Messungen der Geschwindigkeit soll die Temperatur geschätzt werden.

a) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion $\ln f(\mathbf{v}|T)$

b) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für $\hat{T}$.

c) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu ist.

Hinweis: Es gilt: $E\{v\} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \qquad E\{v^2\} = \frac{3kT}{m}.$

Aufgabe 6: Maximum-Likelihood-Schätzer

$$f(v) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Likelihoodfunktion $\ln f(\mathbf{v}|T)$

$$f(\mathbf{v}|T) = \prod_{n=0}^{N-1} f(v_n|T) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_n^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v_n^2$$

$$\Rightarrow \ln f(\mathbf{v}|T) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln f(v_n|T) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{m}{2\pi kT} - \frac{mv_n^2}{2kT} + \ln 4\pi v_n^2\right)$$

$$= \frac{3N}{2} \ln \frac{m}{2\pi kT} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{mv_n^2}{2kT} + \sum_{n=0}^{N-1} \ln 4\pi v_n^2$$

Aufgabe 6: Maximum-Likelihood-Schätzer

- b) Maximum-Likelihood Schätzer für T

Bedingung: $$\frac{\partial}{\partial T} \ln f(\mathbf{v}|T)\Big|_{T=\hat{T}} \stackrel{!}{=} 0$$

aus b) ⇒ $$-\frac{3N}{2}\frac{1}{\hat{T}} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m v_n^2}{2k\hat{T}^2} = 0$$

⇒ $$\hat{T} = \frac{m}{3kN} \sum_{n=0}^{N-1} v_n^2$$

Aufgabe 6: Maximum-Likelihood-Schätzer

- c) Erwartungstreue zeigen

$$E_{\mathbf{v}|T}\left\{\hat{T}\right\} = E_{\mathbf{v}|T}\left\{\frac{m}{3kN}\sum_{n=0}^{N-1} v_n^2\right\} = \frac{m}{3kN}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{E_{v_n|T}\left\{v_n^2\right\}}_{=\frac{3kT}{m}} = T$$

→ erwartungstreu